ЛА | Марин Ов 18.12.22.

5.15| Нека $e_1e_2e_3$ и $f_1f_2f_3$ са два базиса на V. Докажете че $\exists!$ $l \in \mathrm{Hom}\, V$, който изображава $a_1a_2a_3$ съответно във векторите $b_1b_2b_3$ и да се намери матрицата на l в базиса $f_1f_2f_3$ ако:

$a_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $a_2 = e_1 + 3e_3$, $a_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$

$b_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $b_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$, $b_3 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$

$f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $f_3 = e_1 + 3e_2 + 4e_3$

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1a_2a_3$ са ЛНЗ-ни и броят им съвпада с $\dim V \Rightarrow$ базис на V

следователно $\exists!$ $l \in \mathrm{Hom}\, V$, който има

$$l(a_1) = b_1,\ l(a_2) = b_2,\ l(a_3) = b_3$$

Намираме матрицата на l спрямо базиса $e_1e_2e_3$

$$l(a_1) = b_1 = l(e_1) + l(e_3) - l(e_2) = e_1 + e_2 + 2e_3$$
$$l(a_2) = b_2 = l(e_1) + 3l(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$$
$$l(a_3) = b_3 = l(e_1) - l(e_2) + 2l(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l(e_1) \\ l(e_2) \\ l(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 + e_2 + 2e_3 \\ 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 \\ 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$ т.е.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l(e_1) \\ 0 & 1 & 0 & l(e_2) \\ 0 & 0 & 1 & l(e_3) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -e_1 - 3e_2 - 5e_3 \\ -e_1 - 2e_2 - 4e_3 \\ e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} l(e_1) &= -e_1 - 3e_2 - 5e_3 \\ l(e_2) &= -e_1 - 2e_2 - 4e_3 \\ l(e_3) &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$A_e = \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$ матрицата на $\mathcal{L}O$ f спрямо базиса e

$A_\varepsilon = A_{\varepsilon\to e} \cdot A_e \cdot A_{e\to\varepsilon}$ обаче

$A_{\varepsilon\to e} = A_{e\to\varepsilon}^{-1} \Rightarrow A_\varepsilon = A_{e\to\varepsilon}^{-1} \cdot A_e \cdot A_{e\to\varepsilon} \quad / \cdot A_{e\to\varepsilon}$

$A_{e\to\varepsilon} \cdot A_\varepsilon = A_e \cdot A_{e\to\varepsilon}$ ☆

$$A_{e\to\varepsilon} = \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_e A_{e\to\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_e A_{e\to\varepsilon} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} A_e \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} A_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -6 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ ■

5.16) Нека $e_1 e_2 e_3 e_4$ е базис на V и $\mathcal{L}O$ $f \in \mathrm{Hom}\, V$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Да се намерят базиси на подпространствата

$\ker f$, $\mathrm{Im}\, f$, $\ker f + \mathrm{Im}\, f$, $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f$

Γ базис на $\ker f$ / $\ker f = \{v \mid f(v) = \vec{0}_V\}$

$v \in \ker f \Leftrightarrow f(v) = \vec{0}_V$

$f(v) = Av^T \Leftrightarrow$ т. е.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow$ векторкоординатите на v са решение на ХСУ с матрица-матрицата на $\mathcal{L}_f$

Намираме ФСР на ХСУ с матрица-матрицата на оператора f

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 = 0,\ v_3 = 0$$

(**)

полагаме $v_2 = p \Rightarrow v_1 = -2p$

$a_1 (-2, 1, 0, 0)$ при $p = 1$

a_1 е базис на $\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}(a_1)$

$$\operatorname{Im} f = \{ b \mid b \in V, \exists\, a \in V,\ f(a) = b \}$$

$b \in V,\ b \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists a \in V$ т. ка $f(a) = b$

$a \in V \Rightarrow a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$

$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) = b \Leftrightarrow$

$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) + \lambda_4 f(e_4) = b \Leftrightarrow$

$b \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow b \in \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$

$f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ са стълбовете на A

$$\begin{matrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \\ f(e_4) \end{matrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

$b_1 b_2 b_3$ образуват базис на $\operatorname{Im} f$

$$\operatorname{Im} f = \ell(b_1 b_2 b_3)$$

$$\ker f + \operatorname{Im} f = \ell(a_1 b_1 b_2 b_3) \quad \text{т. е.}$$

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ЛНЗ-ми}$$

$a_1 b_1 b_2 b_3$ – базис

Правим ХСЛУ с матрица чиято вектор-редове базисните вектори на $\operatorname{Im} f$

$$(*)\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Намираме ФСР на (*)

$x_4 = 0$, $x_3 = 0$, полагаме и получаваме $x_1 = x_2$ т. е.

$c_1(1\ 1\ 0\ 0)^t$ е ФСР на (*)

образуваме ХСЛУ чиято матрица е вектор-редове векторите от тази ФСР

$$\operatorname{Im} f = \{ x_1 + x_2 = 0$$

$$\ker f = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{от } (**))$$

$$\operatorname{Im} f \cap \ker f \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

За да намерим базис намираме ФСР на ХСЛУ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

(6.5) Да се намерят характеристичните корени на матрицата

$$f(x) = \det(A - xE_n)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \\ & -x & \\ a_{n1} & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

Нека $\ell \in \mathrm{Hom}V$ и A е неговата матрица. Ненулевият вектор наричаме собствен вектор (СВ) ако:

$\ell(v) = \lambda v$ за $\forall \lambda \in F$

$$Av^T = \lambda v^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$(\cos\alpha - x)^2 + \sin^2\alpha = 0$$
$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha x + x^2 + \sin^2\alpha = 0$$
$$x^2 - 2\cos\alpha x + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \quad \text{т. е.} \quad x_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

(6.8) Да се намерят собствените стойности (СС) и собствените вектори (СВ) на ЛО-л, които в даден базис имат матрица

а) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-x & -2 \\ 3 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & -1+x \\ 3 & -1-x \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1+x \\ 3 & -1-x \end{vmatrix} = 0$$ собствена стойност

$$(1-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} (1-x)(-1-x+3)=0 \Rightarrow \\ (1-x)(2-x)=0 \end{matrix}$$

① Намираме СВ съответстващи на $x_1 = 1$
Ако $v = (v_1 v_2)$ СВ

$$\begin{pmatrix} 4-1 & -2 \\ 3 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} 3v_1 - 2v_2 = 0 \\ 3v_1 - 2v_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} \quad x_2 = p \quad x_1 = \frac{2p}{3}$$

$e_1 = (2,3)$ $\forall$ СВ съответстващи на СС $x=1$ имат вида λe_1

② Намираме СВ съответстващи на $x_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 4-2 & -2 \\ 3 & -1-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2v_1 - 2v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3v_2 = 0 \end{matrix} \right\} \quad v_2 = p, \; v_1 = p$$

$e_2 = (1,1)$. $\forall$ СВ съответстващи на СС $x=2$ имат вида λe_2

Векторите e_1, e_2 са ЛНЗ-ки $\Rightarrow$ базис

матрицата на $\mathcal{O}$ е диагонална и има вида

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$ матрицата на прехода $\begin{matrix} e_1 & e_2 \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$

6.3 Нека $e_1 e_2 e_3$ е базис на V, $\varphi \in \mathcal{O}$ на V ($\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$) Да се намери базис на V в който φ има диагонална матрица D и от това действа по правилото с каква матрица

а) $\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (-\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3) e_1 +$

$+ (-3\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3) e_2 + (-3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3) e_3$

I Матрицата на φ спрямо базиса $e_1 e_2 e_3$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(e_1) &= e_1 - 3e_2 - 3e_3 \\ \varphi(e_2) &= 3e_1 + 5e_2 + 3e_3 \\ \varphi(e_3) &= -e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

II Намираме СС

$$f(x) = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & -1 \\ -3 & 5-x & -1 \\ -3 & 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1-x \\ 0 & 2-x & -2+x \\ 0 & 2-x & -1-\frac{(1-x)(1+x)}{3} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1-x \\ 0 & 2-x & -(2-x) \\ 0 & 0 & -1-\frac{(1-x)(1+x)}{3}+(2-x) \end{vmatrix} = -(2-x)(x^2-3x+2) =$$
$$-(2-x)(x-1)(x-2) = 0$$

$$f(x) = -(2-x)(x-1)(x-2)$$

СС-та на φ $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1$

III Намираме СВ

1сл) $x_1 = x_2 = 2$

СВ-ри съответстващи на $x=2$ са решенията на ХСУ

$$\left.\begin{vmatrix} -3x_1 & 3x_2 & -x_3 = 0 \\ -3x_1 & 3x_2 & -x_3 = 0 \\ -3x_1 & 3x_2 & -x_3 = 0 \end{vmatrix}\right\} \Rightarrow$$ общото решение на ХСУ има вида

ФСР $x_1 = p, x_2 = q, x_3 = 3q - 3p$

$(p, q, 3q-3p)$

$e_1(1,0,-3)$ $(p=1, q=0)$ $\qquad e_2(0,1,-3)$ $(p=0\ q=1)$

$e_1 e_2$ образуват базис на пространството на решенията на системата. $\forall$ СВ-ри на φ съответстващи на $x_1 = x_2 = 2$ имат вида

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

2а) $x_3 = 1$

СВ-ри съответстващи на $x_3 = 1$ са решения на ХСУ

$$\left|\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$$

$b_3 = (1\,1\,1)$

$\forall$ СВ съответстващи на $x = 1$ имат вида $\lambda(1\,1\,1) = \lambda b_3$

b_1 и b_3 съответстващи на различни СС-ти $\Rightarrow$ $b_1 b_2 b_3$ са ЛНЗ-ни. Освен това броят им съвпада с $\dim V \Rightarrow$ базис и спрямо този базис матрицата на φ е диагонална и по главния диагонал на тази матрица съответстват собствените стойности на $b_1 b_2 b_3$ т.е.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицата на прехода от базиса $e_1 e_2 e_3$ е

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^{-1}AB = D}$$

$e_1\ b_2\ b_3$

б) $\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3)e_1 + (-2\alpha_1 + 5\alpha_2 - 2\alpha_3)e_2 + (-4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3)e_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{E}(x) \begin{vmatrix} 2-x & -2 & -4 \\ -2 & 5-x & -2 \\ -4 & -2 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2-x \\ 0 & -12+2x & 6-x \\ 0 & 4+2x & (2-x)^2 - 16 \end{vmatrix}$$

$$(6-x)\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2-x \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & (2+x)(x-5) \end{vmatrix} \Rightarrow (6-x)(2+x)(x-5)$$

$x_1 = 6,\ x_2 = -2,\ x_3 = 5$

III 1сл) намираме СВ-ри за $x_1 = 6$

$$\left.\begin{array}{l} -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_1 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$(p, -2p - 2q, q)$

$b_1 (1 -2 0)(p=1\ q=0)$; $b_2 (0 -2, 1)(p=0\ q=1)$

$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$

2сл $x_2 = -2$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ единственото решение е (000) т.е. Няма СВ